



تست ۱
(۲)

الف - با توجه به اینکه هر سری هارارد به نسبت این می دهیم، سری مورد نظر واگراست

$$\sum \frac{\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{پایه توان}} \sum \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \xrightarrow[p=1]{\text{سری واگرا}}$$

ب - سری مورد نظر شرط لازم همگرای دارد که برابر سری وضعیت آن را از همون کوش داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n!}} \xrightarrow{\text{استرینگ}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \text{سری همگرا}$$

ج - با توجه به اینکه در $n \rightarrow \infty$ همان جبره تا شریک ایندیس به سمت صفر میل می کند، با کمک آوری داریم:

$$\sim \sum \sqrt{n} \tan^{-1}\left(\frac{n}{n^2}\right) \sim \sum \sqrt{n} \left(\frac{1}{n}\right) = \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[p=1/2]{\text{سری واگرا}}$$

د - با کمک آزمون کوش داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \xrightarrow{\text{استرینگ}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^2} = 4 > 1 \Rightarrow \text{سری واگرا}$$

تست ۲
(۳)

سرنه های اول و دوم و صبریم، همگی هم شرط لازم همگرای را ندارند!

هت بررسی دقیق سرنه سوم با کمک آزمون کوش داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \xrightarrow{\text{استرینگ}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n/e}{n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{سری همگرا}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{n} = \cos 0 = 1 \neq 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} \xrightarrow{\text{قانون}} \infty \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1^\infty = e^{-1} \neq 0$$

تست ۲
 جهت بررسی نوع همگرایی یک سری ابتدا $\sum |a_n|$ را تحلیل می‌کنیم.

$$S_1 = \sum \left| \frac{(-1)^{n+1} e^{-1/n}}{n^2} \right| = \sum \frac{e^{-1/n}}{n^2} = \sum \frac{1}{n^2 \sqrt[n]{e}} \leq \sum \frac{1}{n^2} \rightarrow \text{سری همگرایی مطلق}$$

همگرا $\leq$ همگرا

$$S_2 = \sum \left| (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \right| = \sum \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{p=\frac{1}{2} < 1} \text{واگرا}$$

ولی S_2 فوشر یک سری لایب نیتز (نوعی) همگرا می‌شود و همگرا می‌شود، پس همگرا می‌شود.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{n!}{n^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n}{e} = -1 \quad \text{همگرا} \quad \text{تست ۴}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(n \sin \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n} \right) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} \right) - \left(1 - \frac{1}{2n^2} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{6n^2} - 1 + \frac{1}{2n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{3n^2} \right) = \frac{1}{3} \rightarrow \text{همگرا}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(k\pi n!) \stackrel{n! = \text{زوج}}{=} \infty \times 0 = 0 \rightarrow \text{همگرا}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n-1} \ln n \stackrel{\text{میزان کند}}{=} (1) \ln n = \infty \rightarrow \text{واگرا}$$

$$\left((k+1)! + k! = k! (k+1+1) = k! (k+2) \right) + (k+2)! = k! (k+2)^2$$

$$\Rightarrow S = \sum \frac{k+2}{k! (k+2)^2} = \sum \frac{1}{k! (k+2)} = \sum \frac{k+1+1}{(k+2)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2!} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{2}$$